Problem des Monats Dezember 2023 / Januar 2024

Noch ein Mützenproblem[1]

Das Geschenkeaufkommen zu Weihnachten wächst weiter, und daher will der Weihnachtsmann noch mehr Helferwichtel einstellen. Drei Bewerber haben sich gemeldet, und der Weihnachtsmann erklärt, wie ihr Einstellungstest diesmal ablaufen soll:

„Zuerst werde ich jedem von euch dreien zufällig entweder eine rote oder eine blaue Mütze aufsetzen. Dabei werdet ihr so platziert, dass jeder von euch nur die Mützenfarben der anderen beiden Wichtel erkennen kann. Insbesondere kennt niemand seine eigene Mützenfarbe. Dann werde ich euch auffordern, die eigene Mützenfarbe zu raten, wobei ihr euch nicht untereinander verständigen und auch nicht die Antworten der anderen hören könnt.“

Sofort wenden die mathematisch versierten Wichtel ein: „Aber was soll das? Wenn du die Farben unserer Mützen unabhängig voneinander zufällig bestimmst, kann doch dann jeder von uns nichts weiter tun, als mit einer Erfolgschance von 50% irgendeine der beiden Farben anzusagen. Die Mützen der anderen helfen niemandem von uns bei dieser Entscheidung.“

Aber der Weihnachtsmann ist mit der Erläuterung der Regeln noch nicht fertig: „Jeder von euch darf seine Mützenfarbe raten oder sich der Stimme enthalten. Zum Bestehen der Prüfung genügt es, wenn mindestens eine richtige Antwort gegeben wird. In diesem Fall stelle ich euch alle ein. Gibt es allerdings auch nur eine einzige falsche Antwort (oder niemand sagt etwas), dann habt ihr verloren und ihr könnt nicht bei mir anfangen. Ihr dürft euch jetzt noch auf eine Strategie verständigen, und dann geht es los.“

Aufgabe 1
Beschreibe eine Strategie, bei der die drei Wichtel eine 50%-ige Wahrscheinlichkeit haben, den Einstellungstest zu bestehen.

Aufgabe 2
Überraschenderweise gibt es eine Strategie, bei der die Wichtel mit deutlich höherer Wahrscheinlichkeit als 50% bestehen!

a) Lies dazu zunächst die Information auf Seite 2 und spiele die dort präsentierte Strategie in verschiedenen Beispielsituationen durch.

b) Formuliere die Strategie als griffige Regel für die Wichtel: In welcher Situation soll ich etwas sagen, und wenn ja, was?

   Bestätige dabei, dass ein Wichtel in den Fällen, in denen er etwas sagt, jeweils zur Hälfte „blau“ bzw. „rot“ sagt, und dass dies in genau der Hälfte der Fälle falsch ist. (Denn wie sollte es auch anders sein? Er weiß es ja nicht besser.)

c) Gib die Erfolgswahrscheinlichkeit für diese Strategie an und beschreibe in Worten, warum sie viel besser ist als einfaches Raten, obwohl die Wichtel (siehe b)) ja trotzdem den Zufall nicht ausschalten können.

Aufgabe 3
Formuliere eine entsprechende Strategie für sieben Wichtel und zeige, dass sieben Wichtel sogar eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $\frac{7}{8} = 87,5\%$ haben.[2]

---

[1] Für zwei weitere Probleme mit Mützen siehe das Problem des Monats Dezember 2014 / Januar 2015.
[2] Allgemein hat diese Strategie bei $2^k - 1$ Wichteln eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $1 - \frac{1}{2^k}$.

Der Hamming-Code und eine Strategie für das Mützenproblem

Hamming-Code

In Computern werden Daten als Folge von Bits (0en und 1en) dargestellt. Bei der Datenübertragung kann es nun z. B. aufgrund einer Leitungsstörung vorkommen, dass einzelne Bits „umkippen", d. h. dass eine übertragene 0 als 1 ankommt oder umgekehrt. Um eine solche Verfälschung der Daten erkennen und vielleicht sogar korrigieren zu können, verwendet man Prüfbits: das sind zusätzliche Bits, die zusammen mit den eigentlich relevanten Daten übertragen werden.

Der Hamming-Code ist nun ein mögliches Verfahren, Prüfbits zu berechnen und mit ihrer Hilfe Fehler in Daten korrigieren zu können. Dargestellt werden soll das Prinzip anhand einer Nachricht aus drei Bits. Es gibt acht verschiedene Bitfolgen, die aus drei Bits bestehen, nämlich

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.$$

Wenn man Übertragungsfehler erkennen will, kann natürlich nicht jede dieser acht Bitfolgen eine gültige Nachricht (im folgenden Codewort genannt) sein: wenn beispielsweise 000 ein Codewort ist, können die Bitfolgen 001, 010 und 100 keine Codewörter mehr sein, denn sie unterscheiden sich vom Codewort 000 in genau einem Bit und könnten deshalb bei der Übertragung durch Verfälschung dieses Bits aus 000 hervorgegangen sein. Nennen wir deshalb 001, 010 und 100 Fehlerwörter zum Codewort 000.

Wenn man einzelne Übertragungsfehler auch korrigieren können will, dürfen zwei Codewörter kein Fehlerwort gemeinsam haben. Nur dann kann nämlich der Empfänger ein Fehlerwort nicht nur als solches erkennen, sondern daraus auch das – dann eindeutige – Codewort wiederherstellen. Zum Codewort 000 wie auch zu jedem anderen Codewort gibt es drei Fehlerwörter, nämlich eines für jede Bitposition. Insgesamt folgt, dass man die insgesamt acht Bitfolgen aus drei Bits für höchstens zwei Codewörter inklusive ihrer jeweiligen Fehlerwörter verwenden kann. Tatsächlich kann man 111 als weiteres Codewort festlegen, das dann die Fehlerwörter 011, 101 und 110 hat.

Entsprechend kann man bei Bitfolgen aus sieben, fünfzehn, ... (allgemein: $2^k - 1$) Bits verfahren: Beispielsweise bei der Übertragung von sieben Bits hat man unter den $2^7 = 128$ verschiedenen möglichen Bitfolgen $\frac{128}{8} = 16$ Codewörter, wobei zu jedem Codewort sieben Fehlerwörter gehören, die sich in genau einem Bit vom jeweiligen Codewort unterscheiden. In diesem Fall ist es allerdings schon nicht mehr auf den ersten Blick erkennbar, welches denn nun konkret 16 mögliche Codewörter sind, aber der Hamming-Code beschreibt exakt, wie man sie „ausrechnen" kann.[3]

Anwendung auf das Mützenproblem

Die drei Wichtel bringen sich in eine Reihenfolge und notieren eine 0 für eine rote und eine 1 für eine blaue Mütze (z. B. steht dann die Bitfolge 001 dafür, dass die ersten beiden Wichtel eine rote und der dritte Wichtel eine blaue Mütze tragen). Für den Einstellungstest legen sie fest: „Sehr wahrscheinlich ist die Bitfolge unserer Mützenfarben ein Fehlerwort." (Warum stimmt das?)

Während des Tests setzt nun jeder Wichtel in die Bitfolge für seine eigene Mütze, deren Farbe er ja nicht kennt, probeweise eine 0 und eine 1 ein. Kommt dabei in einem Fall ein Codewort und im anderen Fall ein Fehlerwort heraus, so nennt der Wichtel dann also laut die entsprechende Farbe für das Fehlerwort. Kommt allerdings in beiden Fällen ein Fehlerwort heraus, so schweigt er. Der Fall, dass in beiden Fällen ein Codewort herauskommt, kann nicht eintreten (warum nicht?).

[3] Für Details siehe den Wikipedia-Artikel „Hamming-Code", bzw. den Artikel „Eberts Hutproblem", in dem das ganze direkt als Anwendung auf das Mützenproblem und mit weniger Mathematik dargestellt wird.